

Michel Ker

Solution numérique des plaques rectangulaires



Dans un précédent ouvrage intitulé 'Solution générale des plaques rectangulaires', nous avons montré qu'il était possible de systématiser la solution de l'équation différentielle des plaques connue sous le nom d'équation de Lagrange

$$\partial^4 \omega / \partial x^4 + 2 \partial^4 \omega / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 \omega / \partial y^4 = q / D$$

Cette solution consiste à calculer les huit constantes d'intégration déduites des conditions d'appuis puis de superposer à la solution générale de la plaque non chargée, une solution particulière de la plaque chargée.

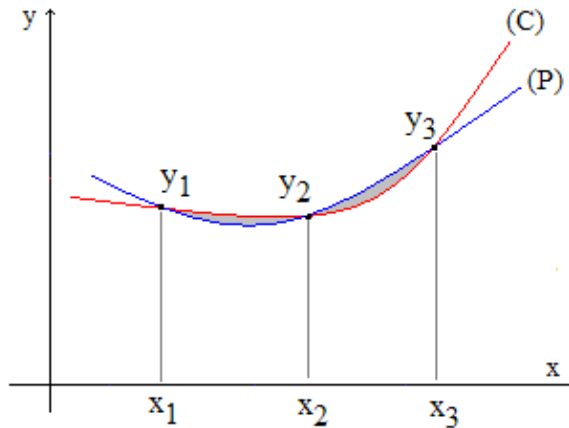
Dans cet ouvrage, nous aborderons une autre résolution de la plaque, basée sur un calcul purement numérique de sa déformée et des moments de flexion qui la sollicitent. Nous utiliserons pour cela la méthode de Simpson de discrétisation d'une fonction continue.

Après avoir décrit la méthode de Simpson, nous l'appliquerons à l'équation différentielle du quatrième ordre aux dérivées partielles des plaques, la transformant en un calcul numérique dont nous rechercherons la solution.

1

Méthode d'intégration de Simpson

La méthode de Simpson consiste à considérer trois points consécutifs d'une courbe et à remplacer l'arc de courbe passant par ces trois points par un arc de parabole.



Lorsque les intervalles sont très petits on conçoit que l'aire comprise entre la courbe C et la parabole P est très faible. De la sorte, l'intégrale de la courbe pourra être assimilée à celle de la parabole dans l'intervalle considéré avec une précision qui augmente lorsque cet intervalle diminue.

L'équation de la parabole est de la forme $y = px^2 + qx + r$
l'équation de la parabole vérifie ces trois conditions

$$\begin{aligned}f_1 &= y_1 = px_1^2 + qx_1 + r \\f_2 &= y_2 = px_2^2 + qx_2 + r \\f_3 &= y_3 = px_3^2 + qx_3 + r\end{aligned}$$

h désignant l'intervalle $x_3 - x_2 = x_2 - x_1 = (x_3 - x_1)/2 = h$

L'intégrale de la fonction entre x_1 et x_3 est $\int_{x_1}^{x_3} f(x)dx = F_3 - F_1$

alors que la primitive de l'équation de la parabole

$$p x^3/3 + q x^2/2 + r x = (2p x^3 + 3q x^2 + 6r x)/6$$

fournit la valeur de son intégrale J définie entre x_1 et x_3

$$J = [2p(x_3^3 - x_1^3) + 3q(x_3^2 - x_1^2) + 6r(x_3 - x_1)]/6$$

$$(x_3^3 - x_1^3) = (x_3 - x_1)(x_1^2 + x_1 x_3 + x_3^2)$$

$$(x_3^2 - x_1^2) = (x_3 - x_1)(x_3 + x_1)$$

$$(x_3 - x_1) = 2h$$

$$\Rightarrow J = [2p(x_1^2 + x_1 x_3 + x_3^2) + 3q(x_3 + x_1) + 6r]h/3$$

avec

$$x_3 = x_2 + h \quad x_1 = x_2 - h$$

$$2p(x_1^2 + x_1 x_3 + x_3^2) = p(x_1^2 + x_3^2) + p(x_1^2 + 2x_1 x_3 + x_3^2)$$

$$3q(x_3 + x_1) = q(x_3 + x_1) + 2q(x_3 + x_1)$$

$$6r = 2r + 4r$$

$$J = \frac{y_1 + y_3}{2} + 4y_2 \quad [h/3]$$

La relation de Simpson conduit donc à une approximation entre l'intégrale définie d'une fonction sur un intervalle de $2h$ et la valeur de cette fonction aux bornes de l'intégration et en sa valeur médiane.

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)dx = F_3 - F_1 \cong [f_1 + 4f_2 + f_3] h/3$$

Cette relation est d'autant plus exacte que l'intervalle est petit

On conçoit donc que la relation de Simpson soit une méthode numérique d'intégration par partie. En effet, découpons l'intervalle d'intégration en n intervalles et en regroupant

les points trois par trois en commençant par $x_0 = a$, on obtient

$$(x_0, x_1, x_2); (x_1, x_2, x_3); (x_3, x_4, x_5); \dots$$

d'où l'on déduit les intégrales partielles modulo $h/3$

$$\begin{array}{c}
f_0 + 4f_1 + f_2 \\
f_2 + 4f_3 + f_4 \\
f_4 + 4f_5 + f_6 \\
\vdots \\
f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n
\end{array}$$

dont la somme de 0 à n peut s'écrire

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{b-a}{3n} \left(f_0 + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f_i + 2 \sum_{i=2,4,6}^{n-2} f_i + f_n \right)$$

La relation de Simpson permet donc de remplacer une intégrale définie entre deux bornes par le calcul numérique d'une série.

Autres formes de la relation de Simpson

en remplaçant dans la relation de Simpson $F = y$ et $f = y'$ celle-ci devient

$$y_3 - y_1 \cong [y'_1 + 4y'_2 + y'_3] h/3$$

ou encore par changement d'indice

$$y_{m+1} - y_{m-1} \cong [y'_{m-1} + 4y'_m + y'_{m+1}] h/3$$

$$y_{m+1} - y_{m-1} \cong [y'_{m-1} + 4y'_m + y'_{m+1}] h/3$$

d'autre part, par définition de la dérivée $\frac{(y_{m+1} - y_{m-1})}{2h} \cong y'_m$ quand $h \rightarrow 0$

$\Rightarrow y_{m+1} - y_{m-1} = 6y'_m h/3$ et en additionnant avec la relation précédente

$$y_{m+1} - y_{m-1} \cong [y'_{m-1} + 10y'_m + y'_{m+1}] h/6$$

En introduisant un point intermédiaire m' entre $m-1$ et m

$$m'' \quad m \quad \text{et} \quad m+1$$

l'intervalle est divisé par deux et en appliquant la relation entre m et $m+1$

$$y_{m+1} - y_m \cong [y'_m + 4y'_{m''} + y'_{m+1}] h/6 \text{ avec } 4y'_{m''} h/6 = 2(y_{m+1} - y_m)/3$$

devient

$$y_{m+1} - y_m = (y'_m + y'_{m+1}) h/2 \text{ et de même } y_m - y_{m-1} = (y'_m + y'_{m-1}) h/2$$

en retranchant ces deux dernières expressions

$$y_{m+1} - 2y_m + y_{m-1} \cong (y'_{m+1} - y'_{m-1}) h/2$$

La relation de Simpson appliquée à la dérivée seconde conduit à :

$$y'_{m+1} - y'_{m-1} \cong [y''_{m-1} + 4y''_m + y''_{m+1}] h/3$$

$y'_{m+1} - y'_{m-1} = 6y''_m h/3$ par définition de la dérivée seconde et en additionnant

$$y'_{m+1} - y'_{m-1} \cong [y''_{m-1} + 10y''_m + y''_{m+1}] h/6$$

Puis en multipliant par $h/2$

$$y_{m+1} - 2y_m + y_{m-1} \cong [y''_{m-1} + 10y''_m + y''_{m+1}] h^2/12$$

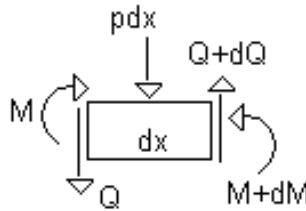
La méthode de Simpson fournit des relations entre les valeurs discrètes de la fonction et ses dérivées première et seconde discrétisées.

2

Discrétisation d'une fonction continue

2.1 – FONCTION A UNE DIMENSION

Soit une poutre soumise à une charge répartie $p(x)$
 en écrivant les équations d'équilibre d'un petit élément de la poutre de longueur dx



somme des forces

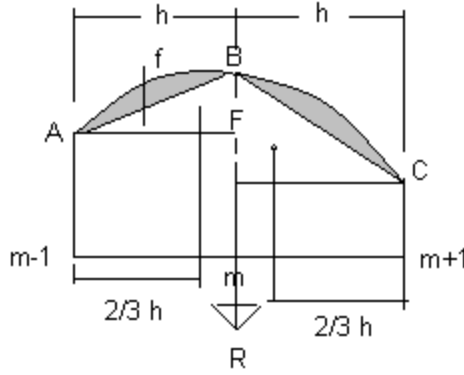
$$Q - (Q + dQ) - p dx = 0 \quad \Rightarrow \quad Q' = dQ/dx = -p$$

somme des moments

$$M - (M + dM) + Q dx - p dx^2/2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M' = dM/dx = Q \text{ et en dérivant } M'' = Q' = -p$$

Nous voulons en des points équidistants remplacer la charge répartie $p(x)$ par des charges aux nœuds p_m et pour cela, on pourra approximer la charge répartie par une fonction quadratique entre trois points dont la distance successive est h

En chaque nœud la réaction des charges nodales devra être égale à celle de la charge répartie



La réaction d'appui au point m des charges à gauche du point se compose d'un trapèze de hauteur h et de base p_{m-1} ou p_m

$$R_1 = \frac{h}{2} (p_{m-1}/3 + 2 p_m/3)$$

de même à droite

$$R_2 = \frac{h}{2} (p_{m+1}/3 + 2 p_m/3)$$

De sorte que la méthode des trapèzes conduit à :

$$R = R_1 + R_2 = \frac{h}{6} (p_{m-1} + 4p_m + p_{m+1})$$

La méthode parabolique consiste à rajouter à cette réaction celle du secteur parabolique dont le centre de gravité est à mi-distance de AB ou de BC

En B la flèche de l'arc parabolique ABC vaut :

$$F = p_m - (p_{m-1} + p_{m+1})/2$$

au milieu de AB la flèche de l'arc parabolique AB vaut

$$f = F/4 = [p_m - (p_{m-1} + p_{m+1})/2]/4$$

L'aire du secteur parabolique AB se calcule suivant

$$\text{aire} = S = 2fh/3$$

La réaction de gauche en m est $S/2$ et de même à droite du point d'où l'on déduit la réaction totale en m

$$R_m = R + S = \frac{h}{6} (p_{m-1} + 4p_m + p_{m+1}) + \frac{h}{6} [p_m - (p_{m-1} + p_{m+1})/2]$$

$$\text{Soit } R_m = \frac{h}{12} (p_{m-1} + 10p_m + p_{m+1})$$